

## Multiplikation und Division in $\mathbb{Q}$

**Rechenregeln**

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

**Vorzeichenregeln**

$$+ \cdot + = +$$

$$+ : + = +$$

$$- \cdot - = +$$

$$- : - = +$$

$$- \cdot + = -$$

$$- : + = -$$

$$+ \cdot - = -$$

$$+ : - = -$$

## Potenzgesetze

**1. Potenzgesetz**

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Beispiel:  $3^3 \cdot 3^4 = 3^{3+4} = 3^7$

$$3^3 \cdot 3^{-4} = 3^{3-4} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

Ü: a)  $5^5 \cdot 5^7 =$

b)  $0,5 \cdot 0,5^2 \cdot 0,5^5 =$

c)  $(-2)^3 \cdot (-2)^{-3} =$

**2. Potenzgesetz**

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Beispiel:  $(3^3)^4 = 3^{3 \cdot 4} = 3^{12}$

Ü: a)  $(3,5^5)^5 =$

b)  $[(k^4)^2]^2 =$

c)  $\left[ \left( -1 \frac{1}{3} \right)^2 \right]^{-7} =$

**3. Potenzgesetz**

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Beispiel:  $2^4 \cdot 3^4 = (2 \cdot 3)^4 = 6^4$

Ü: a)  $5^2 \cdot 3^2 =$

b)  $x^{-3} \cdot y^{-3} \cdot z^{-3} =$

c)  $(-2,5)^7 \cdot (-2)^7 =$

**4. Potenzgesetz**

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Beispiel:  $\frac{3^4}{3^3} = 3^{4-3} = 3^1 = 3$

$$\frac{3^3}{3^4} = 3^{3-4} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

Ü: a)  $7^4 : 7^7 =$

b)  $(-2,2)^{-3} : (-2,2)^3 =$

c)  $\frac{2^{-2}}{2^{-5}} =$

**5. Potenzgesetz**

$$\frac{a^n}{b^n} = \left( \frac{a}{b} \right)^n$$

Beispiel:  $\frac{2^4}{6^4} = \left( \frac{2}{6} \right)^4 = \left( \frac{1}{3} \right)^4$

Ü: a)  $2^{-2} : 14^{-2} =$

b)  $(-8)^5 : 4^5 =$

c)  $\frac{3^{-1}}{9^{-1}} =$

## Lösen von (Un)gleichungen durch Äquivalenzumformungen

### 1 Gleichungen

Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man

- auf beiden Seiten die gleiche Zahl addiert oder subtrahiert,
- beide Seiten mit der gleichen von Null verschiedenen Zahl multipliziert oder durch sie dividiert.

Beispiele:  $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned}
 1. \quad & -2 \cdot x + 6 = 3 \quad | -6 \\
 \Leftrightarrow & -2 \cdot x = -3 \quad | :(-2) \\
 \Leftrightarrow & x = 1,5 \\
 & \mathbb{L} = \{1,5\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & \frac{1}{4} \cdot x - 5 = -7 \quad | +5 \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{4} \cdot x = -2 \quad | \cdot 4 \\
 \Leftrightarrow & x = -8 \\
 & \mathbb{L} = \{-8\}
 \end{aligned}$$

### 2 Ungleichungen

Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man

- auf beiden Seiten die gleiche Zahl addiert oder subtrahiert,
- beide Seiten mit der gleichen positiven Zahl multipliziert oder durch sie dividiert,
- beide Seiten mit der gleichen **negativen Zahl** multipliziert oder durch sie dividiert **und** das Ungleichheitszeichen umkehrt (**Inversionsgesetz**).

Beispiele:  $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned}
 1. \quad & -2 \cdot x < 14 \quad | :(-2) \\
 \Leftrightarrow & x > -7 \quad \text{Inversion!} \\
 & \mathbb{L} = \{x \mid x > -7\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & 6 \cdot x > -27 \quad | :6 \\
 \Leftrightarrow & x > -4,5 \\
 & \mathbb{L} = \{x \mid x > -4,5\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad & -\frac{1}{4} \cdot x + 5 \geq -3 \quad | -5 \\
 \Leftrightarrow & -\frac{1}{4} \cdot x \geq -8 \quad | \cdot (-4) \\
 \Leftrightarrow & x \leq 32 \quad \text{Inversion!} \\
 & \mathbb{L} = \{x \mid x \leq 32\}
 \end{aligned}$$

Ü: Löse durch Äquivalenzumformungen die folgenden Gleichungen und Ungleichungen mit  $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$ :

a)  $-5x + 36 = 28$

b)  $-x - 67 \leq 34$

c)  $2x + 13 \leq -18$

d)  $-12x - 41 > -23$

e)  $(177 - 202) \cdot x + 296 = 411$

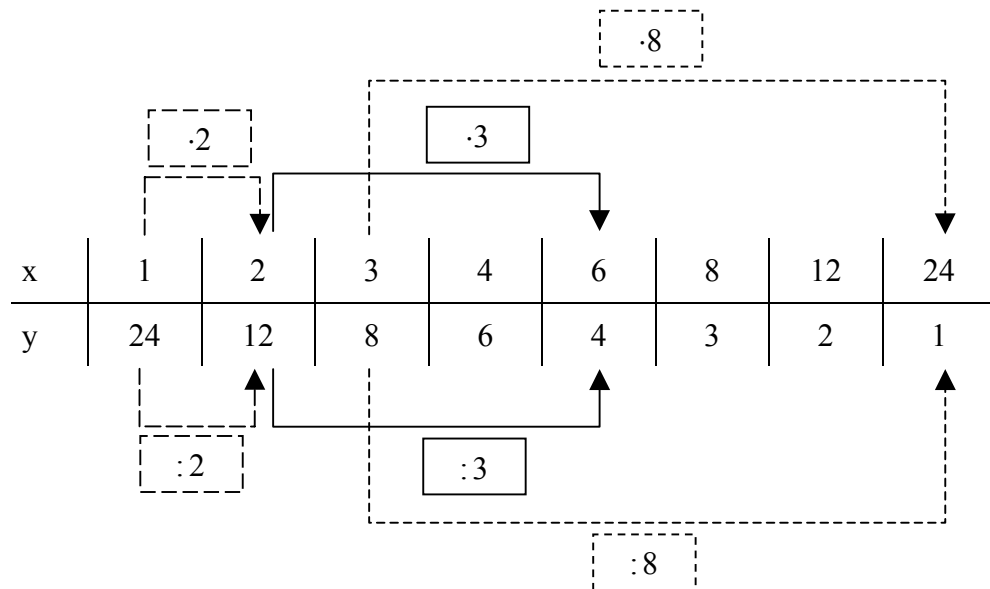
f)  $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x < -\frac{1}{6}$

g)  $2^3 - x \geq 3^2 \cdot 2$

## Indirekte Proportionalität

Entspricht bei einer Zuordnung von Größen das **n-fache** der einen Größe dem **n-ten Teil** der anderen Größe, so heißt diese Zuordnung indirekte Proportionalität.

Beispiel: Der Flächeninhalt eines Rechtecks beträgt  $24 \text{ cm}^2$ . Wenn  $G = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , ist dies für acht Rechtecke verschiedener Länge  $x \text{ cm}$  und Breite  $y \text{ cm}$  möglich.



### Eigenschaften:

- Alle Zahlenpaare  $(x|y)$  einer indirekten Proportionalität sind **produktgleich**. Das Produkt  $x \cdot y$  hat immer den **gleichen Wert**.

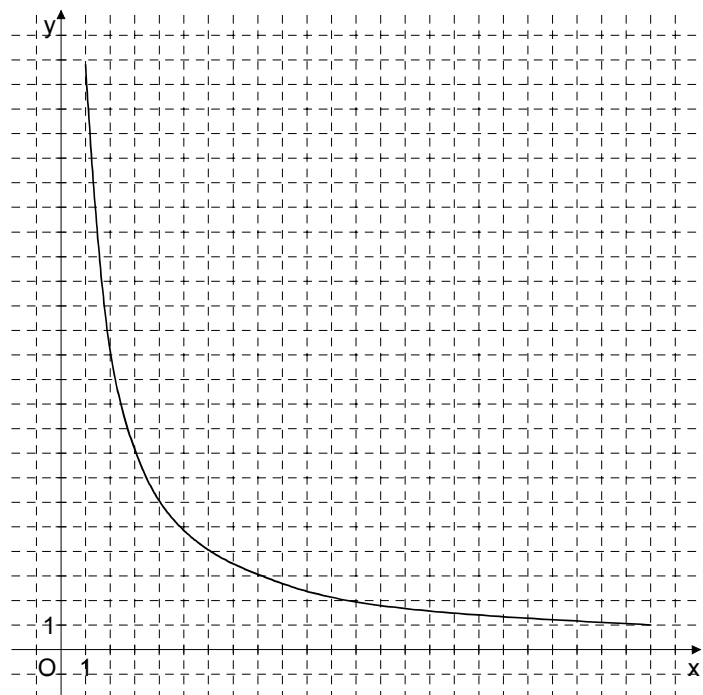
Beispiel:  $x \cdot y = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6 = 6 \cdot 4 = 8 \cdot 3 = 12 \cdot 2 = 24 \cdot 1$

Sprechweise: „ $x$  und  $y$  sind zueinander indirekt proportional“

Schreibweise:  $y \sim \frac{1}{x}$

- Der Graph einer indirekten Proportionalität ist ein **Hyperbelast**. ( $G = \mathbb{Q}_0^+ \times \mathbb{Q}_0^+$ )

Beispiel:



## Zinsrechnung

Die Zinsrechnung ist eine Anwendung der Prozentrechnung. Unter Zinsen (kurz: **Zins**) versteht man den Geldbetrag, den man nach einer bestimmten Zeit für geliehenes Geld bezahlen muss oder für verliehenes Geld bekommt.

Es entsprechen sich:

Prozentwert (PW)



**Jahreszins (Z<sub>J</sub>)**

Prozentsatz (p)



**Zinssatz (p)**

Grundwert (GW)



**Kapital (K)**

Die so berechneten Zinsen  $Z_J$  beziehen sich auf ein Jahr (Jahreszins). Wird ein anderer Zeitraum betrachtet, so muss der Jahreszins auf diesen Zeitraum umgerechnet werden. Ein Geschäftsjahr hat 365 Tage.

Zins für 1 Jahr (Jahreszins)

$$Z_J = \frac{K \cdot p}{100}$$

Zins für 1 Tag

$$Z_t = \frac{K \cdot p}{100 \cdot 365}$$

Zins für n Jahre

$$Z_n = \frac{K \cdot p \cdot n}{100}$$

Zins für T Tage

$$Z_T = \frac{K \cdot p \cdot T}{100 \cdot 365}$$

**Beispiel:** Berechne die Zinsen für 292 Zinstage, wenn ein Kapital 15000,00 € zu 8% verliehen wird.

$$Z_T = \frac{15000 \text{ €} \cdot 8 \cdot 292}{100 \cdot 365} \quad Z_T = 960 \text{ €} \quad \text{Der Zins für 292 Tage beträgt 960,00 €.}$$

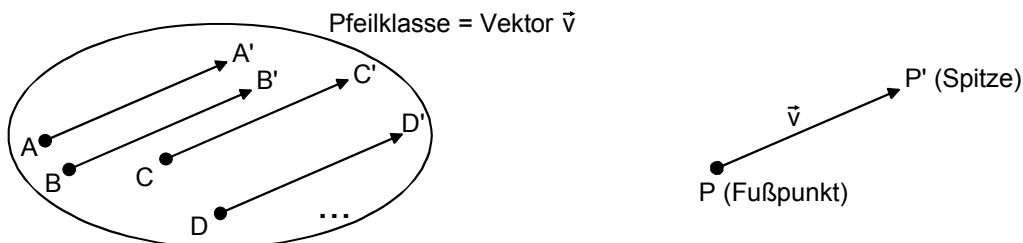
### Übungen:

- 1.0 Auf einem Sparbuch, das mit 3,75% verzinst wird, sind 940,00 €.
- 1.1 Berechne die Zinsen nach einem Jahr.
- 1.2 Berechne den Zinsertrag für das zweite Jahr, wenn die Zinsen des ersten Jahres dem Kapital zugerechnet werden.
  
- 2 Herr Maurer gibt 10000,00 € zu 6,5% auf die Bank und legt alljährlich die gewonnenen Zinsen wieder zu seinem Kapital. Damit erhöht sich sein Kapital Jahr für Jahr um den Zinsertrag. Berechne sein Endkapital nach 5 Jahren.

## Die Parallelverschiebung

**Eigenschaften:**  $P \xrightarrow{\vec{v}} P'$

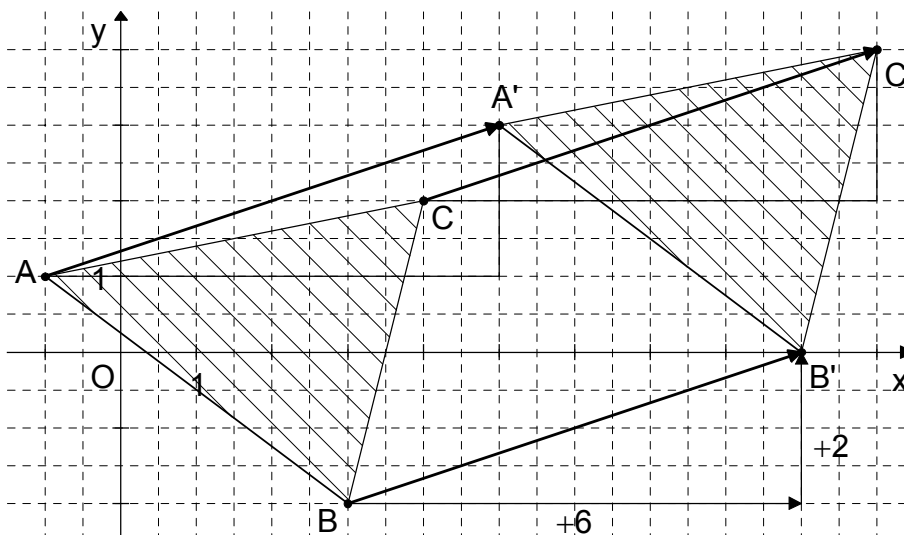
- Bei allen Parallelverschiebungen sind die Verbindungsstrecken von Ursprung  $P$  und Bildpunkt  $P'$  **parallel, gleich lang** und **gleich gerichtet**.
- Sie bilden eine Pfeilkategorie. Jede Pfeilkategorie heißt **Vektor**. Durch jede Parallelverschiebung ist umkehrbar eindeutig ein Vektor bestimmt.
- Alle Parallelverschiebungen haben **keinen** Fixpunkt.
- Alle Parallelverschiebungen sind **längen-** und **winkeltreu** („Kongruenzabbildung“).
- Alle Parallelverschiebungen sind **geraden-** und **kreistreu**.



Jeder Vektor  $\vec{v}$  lässt sich im Koordinatensystem durch seine Koordinaten eindeutig festlegen. Die Koordinaten des Pfeils  $\overrightarrow{PP'}$  und damit des Vektors  $\vec{v}$  werden durch die Koordinaten des **Fußpunktes**  $P(x|y)$  und die Koordinaten der **Spitze**  $P'(x'|y')$  festgelegt. Man berechnet sie nach der Regel:

$\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix}$ <p>„Spitze minus Fuß“</p>	z. B. $P(-2 1)$ und $P'(4 3)$	$\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} 4 - (-2) \\ 3 - 1 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$
---	-------------------------------	--	---

Beispiel:  $\Delta ABC \xrightarrow{\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}} \Delta A'B'C'$  mit  $A(-1|1)$ ,  $B(3|-2)$  und  $C(4|2)$



### Gesetze zur Vektorrechnung

#### 1 Kommutativgesetz und Assoziativgesetz bei der Addition von Vektoren

Kommutativgesetz  $\vec{a} \oplus \vec{b} = \vec{b} \oplus \vec{a}$       Assoziativgesetz  $(\vec{a} \oplus \vec{b}) \oplus \vec{c} = \vec{a} \oplus (\vec{b} \oplus \vec{c})$

#### 2 Berechnung von Summenvektoren

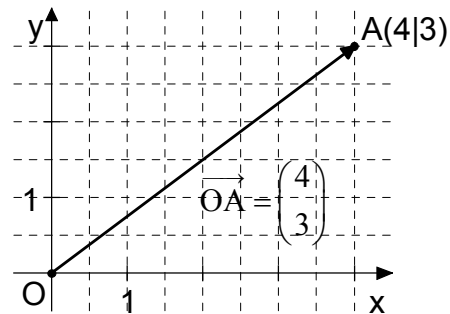
Allgemein  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$        $\vec{a} \oplus \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$        $\vec{a} \oplus \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$

Beispiel  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$        $\vec{a} \oplus \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$        $\vec{a} \oplus \vec{b} = \begin{pmatrix} 3+(-4) \\ 2+1 \end{pmatrix}$        $\vec{a} \oplus \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

#### 3 Ortspfeil

Ortspfeile sind Pfeile, die vom Ursprung des Koordinatensystems zu einem Punkt im Koordinatensystem führen. Die Koordinaten des Ortspfeils sind dieselben wie die Koordinaten des Punktes.

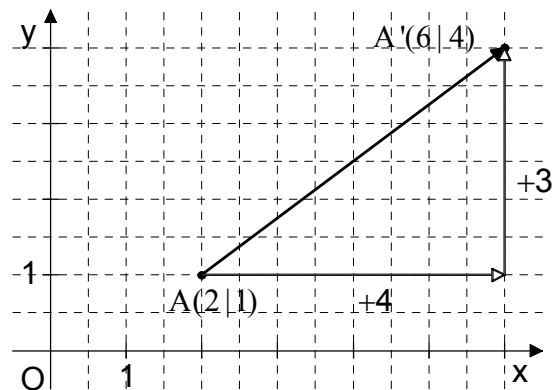
z. B.:  $A(4|3)$        $\vec{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$



#### 4 Berechnung der Koordinaten von Bildpunkten

Allg.:  $\vec{OA'} = \vec{OA} \oplus \vec{v}$        $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$        $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + v_x \\ y + v_y \end{pmatrix}$        $A'(x + v_x | y + v_y)$

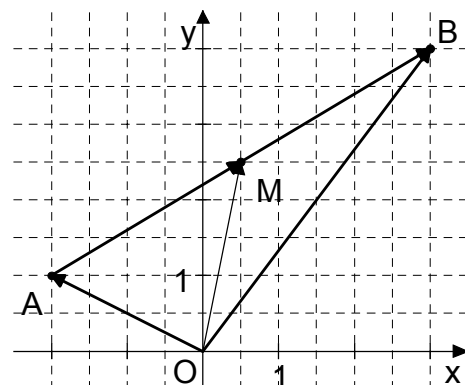
z. B.:  $A(2|1)$        $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$   
 $\vec{OA'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$        $\vec{OA'} = \begin{pmatrix} 2+4 \\ 1+3 \end{pmatrix}$   
 $\vec{OA'} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$        $A'(6|4)$



#### 5 Berechnung der Koordinaten des Mittelpunktes der Strecke [AB]

Allg.:  $A(x_A | y_A), B(x_B | y_B), M(x_M | y_M)$   
 $M(x_M | y_M) = \left( \frac{x_A + x_B}{2} \mid \frac{y_A + y_B}{2} \right)$

z. B.:  $A(-2|1), B(3|4)$   
 $M\left(\frac{-2+3}{2} \mid \frac{1+4}{2}\right) = M(0,5 | 2,5)$



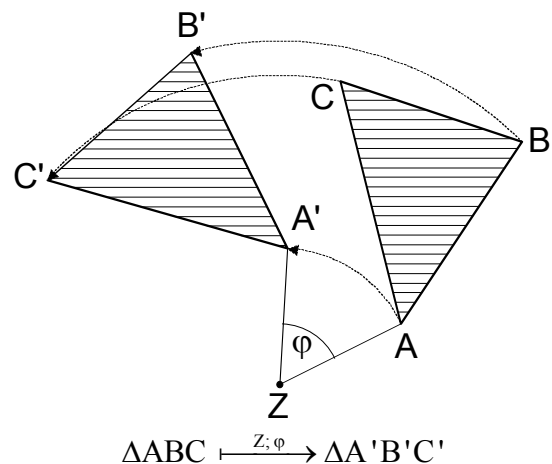
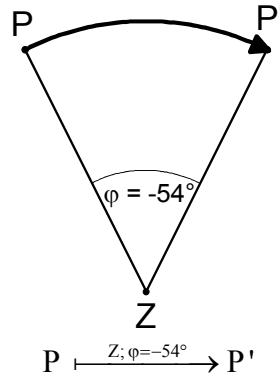
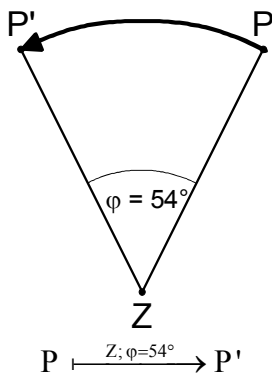
## Die Drehung

**Eigenschaften:**  $P \xrightarrow{Z; \varphi} P'$

- Jede Drehung besitzt einen Punkt  $Z$  als Drehzentrum und einen Winkel  $\varphi$  als Drehwinkel.
- Die Verbindungsstrecken  $[PZ]$  von Ursprung  $P$  und Drehzentrum  $Z$  und  $[P'Z]$  vom zugehörigen Bildpunkt  $P'$  und Drehzentrum  $Z$  sind gleich lang und schließen den Winkel  $PZP'$  mit dem Maß  $\varphi$  ein.
- Alle Drehungen haben nur das **Zentrum  $Z$  als Fixpunkt**.
- Alle Drehungen sind **längen- und winkeltreu** („Kongruenzabbildung“).
- Alle Drehungen sind **geraden- und kreistreu**.

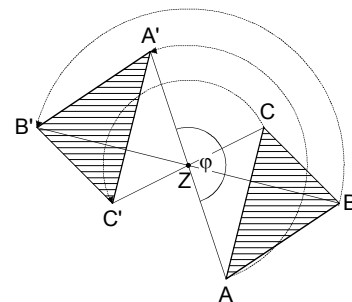
positive Drehrichtung

negative Drehrichtung

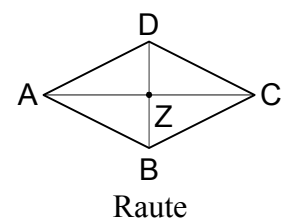
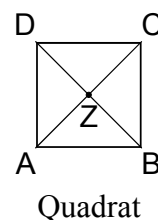
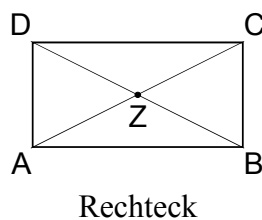
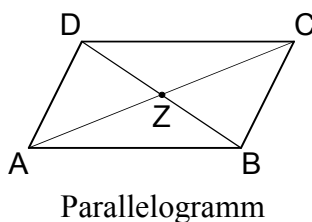


Eine **Drehung um  $180^\circ$**  nennt man auch eine **Punktspiegelung** am Zentrum  $Z$ .

$$\triangle ABC \xrightarrow{Z; \varphi=180^\circ} \triangle A'B'C'$$

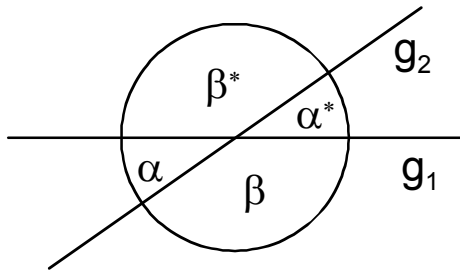


**Merke:** Eine Figur heißt **punktsymmetrisch**, wenn sie durch Drehung an einem Punkt  $Z$  um  $180^\circ$  auf sich selbst abgebildet werden kann.



## Regeln für Winkel

### 1 Neben- und Scheitelwinkel

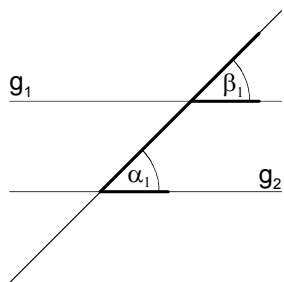


Scheitelwinkel sind gleich groß:  
 $\alpha = \alpha^*$  und  $\beta = \beta^*$

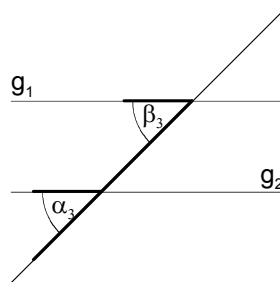
Nebenwinkel ergänzen sich zu  $180^\circ$ :  
 $\alpha + \beta = 180^\circ$

### 2 Winkel an Parallelen ( $g_1 \parallel g_2$ )

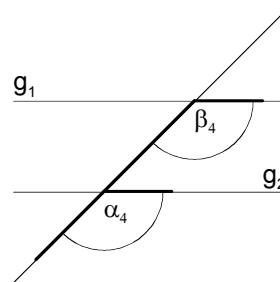
#### 2.1 Stufenwinkel (F-Winkel)



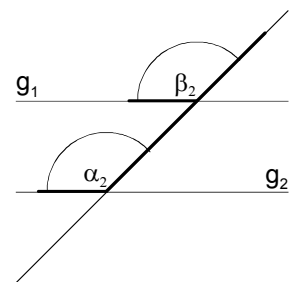
$$\alpha_1 = \beta_1$$



$$\alpha_3 = \beta_3$$

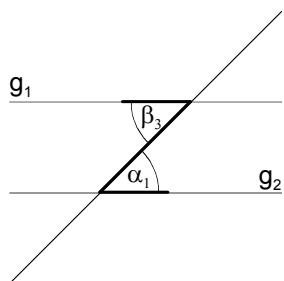


$$\alpha_4 = \beta_4$$

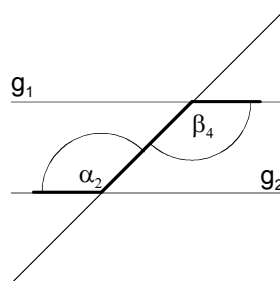


$$\alpha_2 = \beta_2$$

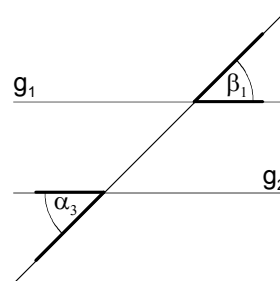
#### 2.2 Wechselwinkel (Z-Winkel)



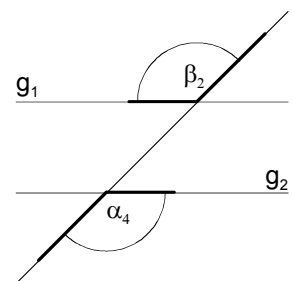
$$\alpha_1 = \beta_3$$



$$\alpha_2 = \beta_4$$



$$\alpha_3 = \beta_1$$



$$\alpha_4 = \beta_2$$

### 3 Innenwinkelsummen

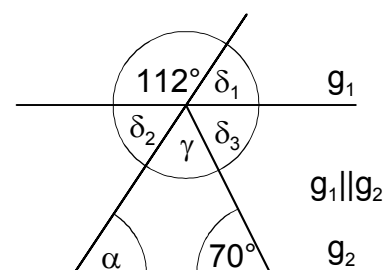
#### 3.1 im Dreieck

In jedem Dreieck beträgt die Summe der Winkelmaße der drei Innenwinkel  $180^\circ$ :  
 $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

#### 3.2 im Viereck

In jedem Viereck beträgt die Summe der Winkelmaße der vier Innenwinkel  $360^\circ$ :  
 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$

Ü: Gib die fehlenden Winkelmaße an und begründe.

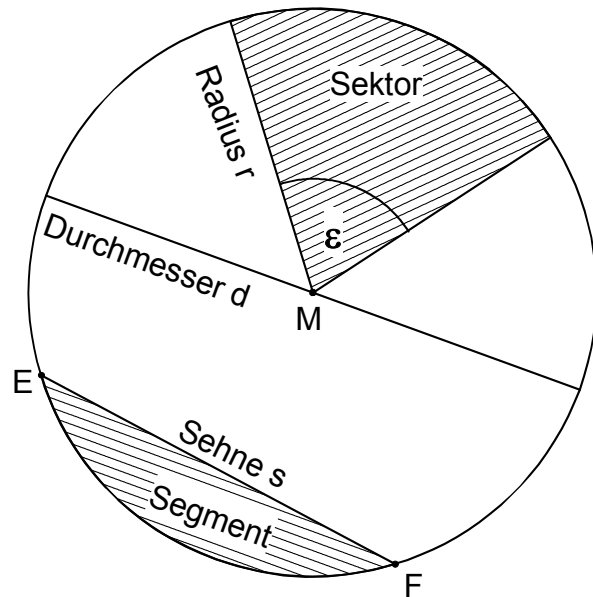




## Der Kreis

### 1 Kreis $k$

- Die Verbindungsstrecke zweier Kreispunkte E und F heißt **Sehne s**.
- Die Sehne s teilt die Kreislinie in zwei **Kreisbögen**  $\widehat{EF}$  und  $\widehat{FE}$ .
- Das von Kreissehne und Kreisbogen begrenzte Flächenstück ist ein **Kreissegment**.
- Ein von zwei Radien und einem Kreisbogen begrenztes Flächenstück ist ein **Kreis-sektor**.
- Die beiden Radien schließen den **Mittelpunktswinkel** mit dem **Maß  $\varepsilon$**  ein.



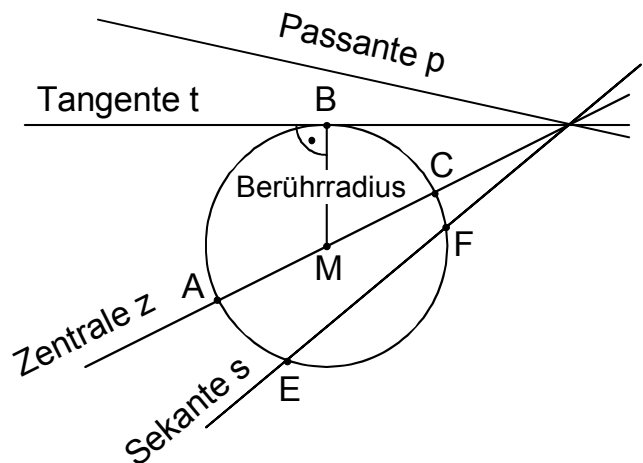
### 2 Lagebeziehung von Kreis $k$ und Gerade

Passante  $p$ :  $p \cap k = \emptyset$

Tangente  $t$ :  $t \cap k = \{B\}$

Zentrale  $z$ :  $z \cap k = \{A; C\}$  mit  $M \in z$

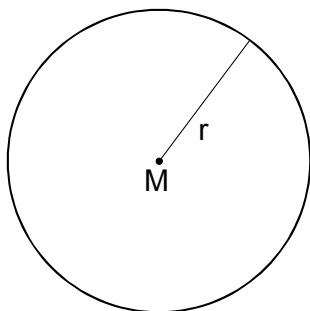
Sekante  $s$ :  $s \cap k = \{E; F\}$



### 3 Berechnungen am Kreis

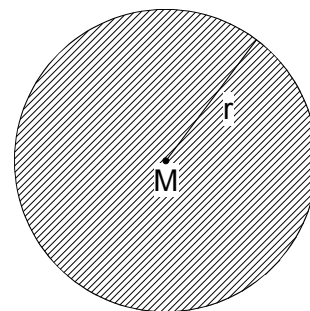
Für den Kreisumfang  $u$  gilt:

$$u = 2 \cdot r \cdot \pi$$



Für den Inhalt der Kreisfläche  $A$  gilt:

$$A = r^2 \cdot \pi$$



Für die Kreiszahl  $\pi$  wird vorläufig der Wert  $\pi \approx 3,14$  oder  $\pi \approx \frac{22}{7}$  benutzt.

## Lösungen

- 7/1 1: a)  $5^{12}$                       b)  $0,5^8$                       c)  $(-2)^0 = 1$
- 2: a)  $3,5^{25}$                       b)  $k^{16}$                       c)  $\left(-1\frac{1}{3}\right)^{-14}$
- 3: a)  $15^2$                       b)  $(x \cdot y \cdot z)^{-3}$                       c)  $5^7$
- 4: a)  $7^{-3}$                       b)  $(-2,2)^{-6}$                       c)  $2^3$
- 5: a)  $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2} = 49$                       b)  $(-2)^5$                       c)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$
- 
- 7/2 a)  $\mathbb{L} = \{1, 6\}$                       b)  $\mathbb{L} = \{x \mid x \geq -101\}$                       c)  $\mathbb{L} = \{x \mid x \leq -15,5\}$
- d)  $\mathbb{L} = \{x \mid x < -1,5\}$                       e)  $\mathbb{L} = \{-4, 6\}$                       f)  $\mathbb{L} = \{x \mid x < -\frac{3}{4}\}$
- g)  $\mathbb{L} = \{x \mid x \leq -10\}$
- 
- 7/4 1.1:  $Z_{\text{Jahr1}} = 35,25 \text{ €}$                       1.2:  $Z_{\text{Jahr2}} = 36,57 \text{ €}$
- 2:  $K_{\text{Jahr5}} = 13700,87 \text{ €}$
- 
- 7/7  $\delta_1 = 180^\circ - 112^\circ$                        $\delta_1 = 68^\circ$                       (Nebenwinkel)
- $\alpha = \delta_1$                        $\alpha = 68^\circ$                       (Stufenwinkel)
- $\delta_2 = \delta_1$                        $\delta_2 = 68^\circ$                       (Scheitelwinkel)
- $\delta_3 = 70^\circ$                       (Wechselwinkel)
- $\gamma = 180^\circ - 68^\circ - 70^\circ$                        $\gamma = 42^\circ$                       (Innenwinkelsumme im Dreieck)